FOL-Decider
Schritt 2: Endlicher Beweisbaum

VL: Finitismus

PD Dr. Timm Lampert

Humboldt Universität Berlin

`triple`

1. `maxexpr`: ∃M-∧I-optimiertes `D'`,
2. `ckpairs` („complete kpairs"): k-Paare + Substitutionsliste *sub*, die eine Unfikationsmöglichkeit kodiert,
3. `praefix`: ein – relativ zu `ckpairs` – optimales Praefix.

False-Kriterium: *sub* ist vollständig separiert.

Sat-Kriterium: kein minimales `triple`.

Schritt 2

1. `D` $\Rightarrow$ `triples` (`start2`):
    1. Minimale k-Paarmengen `ktuples`,
    2. `ckpairs`,
    3. `praefixes`,
2. While-Schleife:
    1. Wenn ein `triple` *False*, dann *False* und ENDE.
    2. Wenn `triples` = {}, dann sat und ENDE.
    3. Sonst:
        1. Entnimm `triples` das erste `triple`,
        2. führe $\forall$M aus (`it` erzeugt `ntriples`),
        3. Erweitere, wenn nötig und möglich, die jeweiligen `ckpairs` der `ntriple (nTriples` erzeugt `ntriples)`.
        4. Vereinige `ntriples` mit dem Rest von `triples`.

Minimale k-Paarmengen

1. Bilde minimale DNF-Matrix einer PNF von `D`,
2. Bilde die Mengen `ktuples` minimaler k-Paarmengen `ktuple`:
   - jedes Disjunkt der DNF-Matrix muss ein k-Paar enthalten (Widerspruchsbedingung);
   - kein `ktuple` darf Teil eines anderen `ktuple` sein (Minimalitätsbedingung).

Beispiel

D: $$\exists y_1(Fy_1 \wedge \exists y_2(\neg Fy_2 \wedge \exists y_3(Gy_1y_3 \wedge Gy_3y_2))) \wedge \forall x_1(\neg Fx_1 \vee \forall x_2(Fx_2 \vee Gx_1x_2))$$

DNF: $$Fx_2 \wedge Fy_1 \wedge Gy_1y_3 \wedge Gy_3y_2 \wedge \neg Fy_2 \vee Fy_1 \wedge Gy_1y_3 \wedge Gy_3y_2 \wedge \neg Fx_1 \wedge \neg Fy_2 \vee Fy_1 \wedge Gy_1y_3 \wedge Gy_3y_2 \wedge \neg Fy_2 \wedge \neg Gx_1x_2$$

ktuples:

$$\{\{\{Fx_2, \neg Fy_2\}, \{Fy_1, \neg Fx_1\}, \{Gy_3y_2, \neg Gx_1x_2\}\}, \{\{Fx_2, \neg Fy_2\}, \{Fy_1, \neg Fx_1\}, \{Gy_1y_3, \neg Gx_1x_2\}\}\}$$

ckpairs

$$\{\{\{\{\{\{x_2, y_2\}\}, \{\}, \{\}\}, \{Fx_2, \neg Fy_2\}\},$$
$$\{\{\{\{x_1, y_1\}\}, \{\}, \{\}\}, \{Fy_1, \neg Fx_1\}\},$$
$$\{\{\{\{x_1, y_3\}, \{x_2, y_2\}\}, \{\}, \{\}\}, \{Gy_3y_2, \neg Gx_1x_2\}\}\}.$$

$$\{\{\{\{\{\{x_2, y_2\}\}, \{\}, \{\}\}, \{Fx_2, \neg Fy_2\}\},$$
$$\{\{\{\{x_1, y_1\}\}, \{\}, \{\}\}, \{Fy_1, \neg Fx_1\}\},$$
$$\{\{\{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_3\}\}, \{\}, \{\}\}, \{Gy_1y_3, \neg Gx_1x_2\}\}\}\}$$

praefix und triples

$$\{\{\exists y_1(Fy_1 \wedge \exists y_2(\neg Fy_2 \wedge \exists y_3(Gy_1y_3 \wedge Gy_3y_2)))\wedge$$
$$\forall x_1\forall x_2(\neg Fx_1 \vee (Fx_2 \vee Gx_1x_2)),$$
$$\{\{\{\{\{x_2, y_2\}\}, \{\}, \{\}\}, \{Fx_2, \neg Fy_2\}\},$$
$$\{\{\{\{x_1, y_1\}\}, \{\}, \{\}\}, \{Fy_1, \neg Fx_1\}\},$$
$$\{\{\{\{x_1, y_3\}, \{x_2, y_2\}\}, \{\}, \{\}\}, \{Gy_3y_2, \neg Gx_1x_2\}\},$$
$$\{y_1, y_2, y_3, x_1, x_2\}\},$$
$$\{\exists y_1(Fy_1 \wedge \exists y_2(\neg Fy_2 \wedge \exists y_3(Gy_1y_3 \wedge Gy_3y_2)))\wedge$$
$$\forall x_1\forall x_2(\neg Fx_1 \vee (Fx_2 \vee Gx_1x_2)),$$
$$\{\{\{\{\{x_2, y_2\}\}, \{\}, \{\}\}, \{Fx_2, \neg Fy_2\}\},$$
$$\{\{\{\{x_1, y_1\}\}, \{\}, \{\}\}, \{Fy_1, \neg Fx_1\}\},$$
$$\{\{\{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_3\}\}, \{\}, \{\}\}, \{Gy_1y_3, \neg Gx_1x_2\}\}\},$$
$$\{y_1, y_2, y_3, x_1, x_2\}\}\}$$

sub-Bedingungen

1. *Alle alternativen* minimalen Unifikationsmöglichkeiten müssen realisiert werden (Widerspruchsbedingung);
2. Nur *minimale* Unifikationsmöglichkeiten dürfen realisiert werden (Minimalitätsbedingung);
3. `praefix` muss *optimal* sein:
   - Es muss für jede *x*-Variable *xvar* eine *y*-Variable *yvar*, durch die *xvar* gemäß *sub* zu ersetzen ist, geben, so dass *yvar* in `praefix` links von *xvar* steht.
   - Um diese Bedingung zu erfüllen, sind ggf. y_0-Variablen in sub einzuführen.

Beispiel

D: $\forall x_1 \exists y_1 F x_1 y_1 \wedge \forall x_2 (\forall x_3 \neg F x_2 x_3 \vee \forall x_4 \neg F x_4 x_2)$

$$\begin{aligned} &\{\{\{\{\{\{x_3, y_1\}\}, \{\{x_1, x_2, y_1\}\}, \{\}\}, \{F x_1 y_1, \neg F x_2 x_3\}\}, \\ &\{\{\{\{x_2, y_1\}\}, \{\{x_1, x_4, y_1\}\}, \{\}\}, \{F x_1 y_1, \neg F x_4 x_2\}\}\}, \end{aligned} \tag{3.63a}$$

$$\begin{aligned} &\{\{\{\{\{x_3, y_1\}, \{x_1, y_0\}\}, \{\{x_1, x_2, y_0\}\}, \{\}\}, \{F x_1 y_1, \neg F x_2 x_3\}\}, \\ &\{\{\{\{x_2, y_1\}, \{x_1, y_0\}\}, \{\{x_1, x_4, y_0\}\}, \{\}\}, \{F x_1 y_1, \neg F x_4 x_2\}\}\}, \end{aligned} \tag{3.63b}$$

$$\begin{aligned} &\{\{\{\{\{x_3, y_1\}\}, \{\{x_1, x_2, y_1\}\}, \{\}\}, \{F x_1 y_1, \neg F x_2 x_3\}\}, \\ &\{\{\{\{x_2, y_1\}, \{x_1, y_0\}\}, \{\{x_1, x_4, y_0\}\}, \{\}\}, \{F x_1 y_1, \neg F x_4 x_2\}\}\}, \end{aligned} \tag{3.63c}$$

$$\begin{aligned} &\{\{\{\{\{x_3, y_1\}, \{x_1, y_0\}\}, \{\{x_1, x_2, y_0\}\}, \{\}\}, \{F x_1 y_1, \neg F x_2 x_3\}\}, \\ &\{\{\{\{x_2, y_1\}\}, \{\{x_1, x_4, y_1\}\}, \{\}\}, \{F x_1 y_1, \neg F x_4 x_2\}\}\}\} \end{aligned} \tag{3.63d}$$

Beweis

new expression: $\forall_{x(1)} \exists_{y(1)} F(x(1), y(1)) \bigwedge \forall_{x(2)} \left(\forall_{x(3)} \neg F(x(2), x(3)) \bigvee \forall_{x(4)} \neg F(x(4), x(2))\right)$

em-optimized sat-equivalent FOLDNF:

$\forall_{x(1)} \exists_{y(1)} F(x(1), y(1)) \bigwedge \forall_{x(2)} \left(\forall_{x(3)} \neg F(x(2), x(3)) \bigvee \forall_{x(4)} \neg F(x(4), x(2))\right)$

proof found: False

final sat-equivalent expression:

$\forall_{x(2)} \left(\forall_{x(3)} \neg F(x(2), x(3)) \bigvee \forall_{x(4)} \neg F(x(4), x(2))\right) \bigwedge$
$\forall_{x(1,1)} \exists_{y(1,1)} F(x(1, 1), y(1, 1)) \bigwedge \forall_{x(1,2)} \exists_{y(1,2)} F(x(1, 2), y(1, 2))$

final kpairs:

$\begin{pmatrix} F(x(1, 2), y(1, 2)) & \neg F(x(2), x(3)) \\ F(x(1, 1), y(1, 1)) & \neg F(x(4), x(2)) \end{pmatrix}$

final sublist:

{{x[2], y[1, 1]}, {x[3], y[1, 2]}, {x[4], y[0]}, {x[1, 1], y[0]}, {x[1, 2], y[1, 1]}}

final prefix:

{y[0], x[1, 1], y[1, 1], x[1, 2], y[1, 2], x[2], x[3], x[4]}

`it`: Allquantormultiplikationen $\forall$M

1. Identifiziere einen zu multiplizierenden Allquantor $\forall xvar$.
2. Führe alle $\exists$M-Optimierungen im Wirkungsbereich von $\forall xvar$ aus, insoweit dies noch nicht in vorangegangenen Schritten geschehen ist.
3. Führe zusätzlich $\wedge$I-Optimierungen durch, um $\forall xvar$ zu multiplizieren.
4. Führe alle $\exists$M-Optimierungen außerhalb des Wirkungsbereiches der multiplizieten Ausdrücke $\forall xvar_1$ … $\forall xvar_n$ durch.
5. Modifiziere *y*-Variable in *xxy*-Listen von *sub*.
6. Realisiere alle optimalen Erweiterungen von ***`praefix`***.
7. Minimalisiere die resultierende Liste `triples`.

Beispiel 1

new expression: $\forall_{x(1)} \exists_{y(1)} \left(F(x(1), y(1)) \wedge \forall_{x(2)} \neg F(y(1), x(2))\right) \bigwedge$
$\forall_{x(3)} \left(\forall_{x(4)} \neg F(x(4), x(3)) \vee \forall_{x(5)} F(x(3), x(5))\right)$

em-optimized sat-equivalent FOLDNF:

$\forall_{x(1)} \exists_{y(1)} \left(F(x(1), y(1)) \wedge \forall_{x(3)} \neg F(y(1), x(3))\right) \bigwedge$
$\forall_{x(2)} \left(\forall_{x(4)} F(x(2), x(4)) \vee \forall_{x(5)} \neg F(x(5), x(2))\right)$

proof found: False

final sat-equivalent expression:

$\exists_{y(1,2)} \forall_{x(3)} \neg F(y(1, 2), x(3)) \wedge \forall_{x(1)} \exists_{y(1,1)} F(x(1), y(1, 1))$

final kpairs:

$(F(x(1), y(1, 1)) \quad \neg F(y(1, 2), x(3)))$

final sublist:

{{x[1], y[1, 2]}, {x[3], y[1, 1]}}

final prefix:

{y[1, 2], x[1], y[1, 1], x[3]}

Beispiel 2

new expression: $\exists_{y(2)}\ \exists_{y(3)}\ F(y(2), y(3)) \bigwedge \forall_{x(1)}\ \exists_{y(1)}\ \forall_{x(3)}\ (F(x(3), y(1)) \vee \neg F(x(1), x(3))) \bigwedge$
$\forall_{x(2)}\ (\forall_{x(4)}\ \neg F(x(4), x(2)) \bigvee \forall_{x(5)}\ (\forall_{x(6)}\ \neg F(x(5), x(6)) \vee \neg F(x(2), x(5))))$

em-optimized sat-equivalent FOLDNF:

$$\exists_{y(2)}\ \exists_{y(3)}\ F(y(2), y(3)) \bigwedge \forall_{x(1)}\ \exists_{y(1)}\ \forall_{x(3)}\ (F(x(3), y(1)) \vee \neg F(x(1), x(3))) \bigwedge$$
$$\forall_{x(2)}\ (\forall_{x(4)}\ \neg F(x(4), x(2)) \bigvee \forall_{x(5)}\ (\forall_{x(6)}\ \neg F(x(5), x(6)) \vee \neg F(x(2), x(5))))$$

proof found: False

final sat-equivalent expression:

$$\exists_{y(2)}\ \exists_{y(3)}\ F(y(2), y(3)) \bigwedge$$
$$\forall_{x(2)}\ (\forall_{x(4)}\ \neg F(x(4), x(2)) \bigvee \forall_{x(5)}\ (\forall_{x(6)}\ \neg F(x(5), x(6)) \vee \neg F(x(2), x(5)))) \bigwedge$$
$$\forall_{x(1,1)}\ \exists_{y(1,1)}\ \forall_{x(3,1)}\ (F(x(3, 1), y(1, 1)) \vee \neg F(x(1, 1), x(3, 1))) \bigwedge$$
$$\forall_{x(1,2)}\ \exists_{y(1,2)}\ \forall_{x(3,2)}\ (F(x(3, 2), y(1, 2)) \vee \neg F(x(1, 2), x(3, 2)))$$

final kpairs:

$$\begin{pmatrix} F(x(3, 1), y(1, 1)) & \neg F(x(5), x(6)) \\ F(x(3, 2), y(1, 2)) & \neg F(x(2), x(5)) \\ F(x(3, 2), y(1, 2)) & \neg F(x(1, 1), x(3, 1)) \\ F(y(2), y(3)) & \neg F(x(4), x(2)) \\ F(y(2), y(3)) & \neg F(x(1, 2), x(3, 2)) \end{pmatrix}$$

final sublist:

{{x[2], y[3]}, {x[4], y[2]}, {x[5], y[1, 2]}, {x[6], y[1, 1]},
{x[1, 1], y[3]}, {x[1, 2], y[2]}, {x[3, 1], y[1, 2]}, {x[3, 2], y[3]}}

final prefix:

{y[2], y[3], x[1, 1], y[1, 1], x[1, 2], y[1, 2], x[2], x[4], x[5], x[6], x[3, 1], x[3, 2]}

total number of iteration steps: 14

`nTriples`: `ckpairs`-Erweiterung

1. Berechne die *minimalen* *k*-Paar-Erweiterungen `ktuples`.
   - Wenn keine Erweiterung nötig, dann `ntriples` ≈ `triples` und ENDE.
   - Wenn keine minimale Erweiterung möglich, dann `ntriples = {}` und Ende.
2. Gehe einzelne `ktuple` durch und bilde die *minimalen* und mit den bestehenden ck-Paaren *verträglichen* *ck*-Paar-Erweiterungen `nckpairs` sowie die daraus resultierenden Erweiterungen der optimalen `praefixe`.
3. Vereinige alle Resultate zur Liste `ntriples`.

Dreben/Goldfarb[1979], S. 120

Timing[decide[goldfarb]]

----

new expression: $\forall_{y(1)}\, \exists_{x}\, \forall_{y(2)}\, ((P(y(1), y(2)) \Rightarrow Q(x, y(2))) \wedge (Q(y(1), y(2)) \Rightarrow Q(x, y(2))) \wedge \neg Q(y(1), y(1)) \wedge P(y(1), y(1)))$

em-optimized sat-equivalent FOLDNF:

$\forall_{x(1)}\, \exists_{y(1)}\, \forall_{x(5)}\, (\neg P(x(1), x(5)) \vee Q(y(1), x(5))) \wedge \forall_{x(2)}\, \exists_{y(2)}\, \forall_{x(6)}\, (\neg Q(x(2), x(6)) \vee Q(y(2), x(6))) \wedge$
$\forall_{x(3)}\, \neg Q(x(3), x(3)) \wedge \forall_{x(4)}\, P(x(4), x(4))$

Anfängliche `triple`

triple no. 1 after start2:

maxexpr: $\forall_{x(1)} \exists_{y(1)} \forall_{x(5)} (\neg P(x(1), x(5)) \vee Q(y(1), x(5))) \wedge \forall_{x(2)} \exists_{y(2)} \forall_{x(6)} (\neg Q(x(2), x(6)) \vee Q(y(2), x(6))) \wedge \forall_{x(3)} \neg Q(x(3), x(3)) \wedge \forall_{x(4)} P(x(4), x(4))$

ckpairs: $\begin{pmatrix} \{(x(1)\;\; y(0)), (x(1)\;\; x(4)\;\; x(5)\;\; y(0)), \{\}\} & \{\{P(x(4), x(4)), \neg P(x(1), x(5))\}, \text{and}\} \\ \left\{\begin{pmatrix} x(3) & y(1) \\ x(5) & y(1) \end{pmatrix}, \{\}, \{\}\right\} & \{\{Q(y(1), x(5)), \neg Q(x(3), x(3))\}, \text{and}\} \end{pmatrix}$

prefix: {y[0], x[1], y[1], x[3], x[4], x[5]}

triple no. 2 after start2:

maxexpr: $\forall_{x(1)} \exists_{y(1)} \forall_{x(5)} (\neg P(x(1), x(5)) \vee Q(y(1), x(5))) \wedge \forall_{x(2)} \exists_{y(2)} \forall_{x(6)} (\neg Q(x(2), x(6)) \vee Q(y(2), x(6))) \wedge \forall_{x(3)} \neg Q(x(3), x(3)) \wedge \forall_{x(4)} P(x(4), x(4))$

ckpairs: $\begin{pmatrix} \{(x(1)\;\; y(0)), (x(1)\;\; x(4)\;\; x(5)\;\; y(0)), \{\}\} & \{\{P(x(4), x(4)), \neg P(x(1), x(5))\}, \text{and}\} \\ \{(x(2)\;\; y(1)), (x(5)\;\; x(6)\;\; y(2)), \{\}\} & \{\{Q(y(1), x(5)), \neg Q(x(2), x(6))\}, \text{and}\} \\ \left\{\begin{pmatrix} x(3) & y(2) \\ x(6) & y(2) \end{pmatrix}, \{\}, \{\}\right\} & \{\{Q(y(2), x(6)), \neg Q(x(3), x(3))\}, \text{and}\} \end{pmatrix}$

prefix: {y[0], x[1], y[1], x[2], y[2], x[3], x[4], x[5], x[6]}

Allquantormultiplikation

input to it:

maxexpr: $\forall_{x(1)} \exists_{y(1)} \forall_{x(5)} (\neg P(x(1), x(5)) \vee Q(y(1), x(5))) \wedge \forall_{x(2)} \exists_{y(2)} \forall_{x(6)} (\neg Q(x(2), x(6)) \vee Q(y(2), x(6))) \wedge \forall_{x(3)} \neg Q(x(3), x(3)) \wedge \forall_{x(4)} P(x(4), x(4))$

ckpairs: $\begin{pmatrix} \{(x(1)\ \ y(0)), (x(1)\ \ x(4)\ \ x(5)\ \ y(0)), \{\}\} & \{\{P(x(4), x(4)), \neg P(x(1), x(5))\}, \text{and}\} \\ \left\{\begin{pmatrix} x(3) & y(1) \\ x(5) & y(1) \end{pmatrix}, \{\}, \{\}\right\} & \{\{Q(y(1), x(5)), \neg Q(x(3), x(3))\}, \text{and}\} \end{pmatrix}$

prefix: $\{y(0), x(1), y(1), x(3), x(4), x(5)\}$

output no. 1 it / input no. 1 nTriples:

maxexpr: $\forall_{x(2)} \exists_{y(2)} \forall_{x(6)} (\neg Q(x(2), x(6)) \vee Q(y(2), x(6))) \wedge \forall_{x(3)} \neg Q(x(3), x(3)) \wedge \forall_{x(4)} P(x(4), x(4)) \wedge \forall_{x(1,1)} \exists_{y(1,1)} \forall_{x(5,1)} (\neg P(x(1, 1), x(5, 1)) \vee Q(y(1, 1), x(5, 1))) \wedge \forall_{x(1,2)} \exists_{y(1,2)} \forall_{x(5,2)} (\neg P(x(1, 2), x(5, 2)) \vee Q(y(1, 2), x(5, 2)))$

ckpairs: $\begin{pmatrix} \{(x(1, 1)\ \ y(0)), (x(1, 1)\ \ x(4)\ \ x(5, 1)\ \ y(0)), \{\}\} & \{\{P(x(4), x(4)), \neg P(x(1, 1), x(5, 1))\}, \text{and}\} \\ \left\{\begin{pmatrix} x(3) & y(1, 2) \\ x(5, 2) & y(1, 2) \end{pmatrix}, \{\}, \{\}\right\} & \{\{Q(y(1, 2), x(5, 2)), \neg Q(x(3), x(3))\}, \text{and}\} \end{pmatrix}$

prefix: $\{y(0), x(1, 1), y(1, 2), x(3), x(4), x(5, 1), x(5, 2)\}$

output no. 2 it / input no. 2 nTriples:

maxexpr: $\forall_{x(2)} \exists_{y(2)} \forall_{x(6)} (\neg Q(x(2), x(6)) \vee Q(y(2), x(6))) \wedge \forall_{x(3)} \neg Q(x(3), x(3)) \wedge \forall_{x(4)} P(x(4), x(4)) \wedge \forall_{x(1,1)} \exists_{y(1,1)} \forall_{x(5,1)} (\neg P(x(1, 1), x(5, 1)) \vee Q(y(1, 1), x(5, 1))) \wedge \forall_{x(1,2)} \exists_{y(1,2)} \forall_{x(5,2)} (\neg P(x(1, 2), x(5, 2)) \vee Q(y(1, 2), x(5, 2)))$

ckpairs: $\begin{pmatrix} \{(x(1, 1)\ \ y(0)), (x(1, 1)\ \ x(4)\ \ x(5, 1)\ \ y(0)), \{\}\} & \{\{P(x(4), x(4)), \neg P(x(1, 1), x(5, 1))\}, \text{and}\} \\ \left\{\begin{pmatrix} x(3) & y(1, 2) \\ x(5, 2) & y(1, 2) \end{pmatrix}, \{\}, \{\}\right\} & \{\{Q(y(1, 2), x(5, 2)), \neg Q(x(3), x(3))\}, \text{and}\} \end{pmatrix}$

prefix: $\{y(0), y(1, 2), x(1, 1), x(3), x(4), x(5, 1), x(5, 2)\}$

Minimale Erweiterung (`minkTupleQ1`)

```
ktuples before minkTupleQ:
ktuple no. 1: {{P[x[4], x[4]], !P[x[1, 2], x[5, 2]]}}
ktuple no. 2: {{Q[y[1, 1], x[5, 1]], !Q[x[3], x[3]]}}
ktuple no. 3: {{Q[y[2], x[6]], !Q[x[3], x[3]]}, {Q[y[1, 1], x[5, 1]], !Q[x[2], x[6]]}}
redundant k-pairs: {{P[x[4], x[4]], !P[x[1, 1], x[5, 1]]}}
redundant k-pairs: {{Q[y[1, 2], x[5, 2]], !Q[x[3], x[3]]}}
redundant k-pairs: {{Q[y[1, 2], x[5, 2]], !Q[x[3], x[3]]}}
ktuples after minkTupleQ: {}
ktuples before minkTupleQ:
ktuple no. 1: {{P[x[4], x[4]], !P[x[1, 2], x[5, 2]]}}
ktuple no. 2: {{Q[y[1, 1], x[5, 1]], !Q[x[3], x[3]]}}
ktuple no. 3: {{Q[y[2], x[6]], !Q[x[3], x[3]]}, {Q[y[1, 1], x[5, 1]], !Q[x[2], x[6]]}}
redundant k-pairs: {{P[x[4], x[4]], !P[x[1, 1], x[5, 1]]}}
redundant k-pairs: {{Q[y[1, 2], x[5, 2]], !Q[x[3], x[3]]}}
redundant k-pairs: {{Q[y[1, 2], x[5, 2]], !Q[x[3], x[3]]}}
ktuples after minkTupleQ: {}
output nTriples:
ntriples: {}
```

Quine[1982], S. 183

ϕ: $\forall x \exists y \forall z (Fxy \wedge (Fyz \to Fxz) \wedge \neg Fxx)$

1.Schritt: $\forall x_1 \exists y_1 F x_1 y_1 \wedge \forall x_3 \neg F x_3 x_3 \wedge$
$\forall x_2 \exists y_2 \forall x_4 (F x_2 x_4 \vee \neg F y_2 x_4)$

Anfängliche `triples` enthält nur ein Element bestehend aus dem Resultat von Schritt 1 sowie:

$$\{\{\{\{x_1, y_2\}, \{\underline{x_4, y_1}\}\}, \{\}\}, \{F x_1 y_1, \neg F y_2 x_4\}\},$$
$$\{\{\{\{x_2, y_0\}\}, \{\{x_2, x_3, \underline{x_4, y_0}\}\}, \{\}\}, \{F x_2 x_4, \neg F x_3 x_3\}\}\}$$

$$\{x_2, y_2, x_1, y_1, x_3, x_4\}$$

Allquantormultiplikation

`triples`, deren Elemente sich nur in `praefix` unterscheiden:

$$\forall x_1 \exists y_1 F x_1 y_1 \wedge \forall x_3 \neg F x_3 x_3 \wedge$$
$$\forall x_{2_1} \exists y_{2_1} \forall x_{4_1} (F x_{2_1} x_{4_1} \vee \neg \underline{F y_{2_1} x_{4_1}}) \wedge$$
$$\forall x_{2_2} \exists y_{2_2} \forall x_{4_2} (\underline{F x_{2_2} x_{4_2}} \vee \neg F y_{2_2} x_{4_2})$$

$$\{\{\{\{x_1, y_{2_2}\}, \{\underline{x_{4_2}, y_1}\}\}, \{\}, \{\}, \}\{F x_1 y_1, \neg F y_{2_2} x_{4_2}\}\},$$
$$\{\{\{x_{2_1}, y_0\}\}, \{\{x_{2_1}, x_3, \underline{x_{4_1}, y_0}\}\}, \{\}, \{F x_{2_1} x_{4_1}, \neg F x_3 x_3\}\}\}$$

$$\{y_0, x_{2_1}, y_{2_2}, x_1, y_1, x_3, x_{4_1}, x_{4_2}\}$$
$$\{y_0, y_{2_2}, x_1, y_1, x_{2_1}, x_3, x_{4_1}, x_{4_2}\}$$
$$\{y_0, y_{2_2}, x_1, x_{2_1}, y_1, x_3, x_{4_1}, x_{4_2}\}$$

Unverträgliche Substitutionen (minkTupleQ2)

$$\{\cancel{\{\{Fx_1y_1, \neg Fy_{2_1}x_{4_1}\}\},}$$
$$\cancel{\{\{Fx_{2_2}x_{4_2}, \neg Fx_3x_3\}\}},$$
$$\{\{Fx_{2_2}x_{4_2}, \neg Fy_{2_1}x_{4_1}\}\}\}$$

oldckpairs:

$$\{\{\{\{x_1, y_{2_2}\}, \{x_{4_2}, y_1\}\}, \{\}\}, \{Fx_1y_1, \neg Fy_{2_2}x_{4_2}\}\},$$
$$\{\{\{\{x_{2_1}, y_0\}\}, \{\{x_{2_1}, x_3, x_{4_1}, y_0\}\}, \{\}\}, \{Fx_{2_1}x_{4_1}, \neg Fx_3x_3\}\}\}$$

newckpairs:

$$\{\{\{\{x_{2_2}, y_{2_1}\}\}, \{\}, \{\{x_{4_1}, x_{4_2}\}\}\}, \{\{Fx_{2_2}x_{4_2}, \neg Fy_{2_1}x_{4_1}\}, or\}\}$$

$\Rightarrow$ unverträglich

Hilbert/Bernays[1970], S. 14

```
Timing[decide[hilbert]]

--------------------------------
```

new expression: $\forall_{x(1)}\ \exists_{y(1)}\ F(x(1), y(1)) \wedge \forall_{x(2)}\ \forall_{x(3)}\ \forall_{x(4)}\ (F(x(2), x(3)) \wedge F(x(3), x(4)) \Rightarrow F(x(2), x(4))) \wedge \forall_{x(5)}\ \neg F(x(5), x(5))$

em-optimized sat-equivalent FOLDNF:

$$\forall_{x(1)}\ \exists_{y(1)}\ F(x(1), y(1)) \bigwedge \forall_{x(2)}\ \forall_{x(4)}\ \left(\forall_{x(5)}\ (F(x(4), x(5)) \vee \neg F(x(2), x(5))) \vee \neg F(x(4), x(2))\right) \bigwedge \forall_{x(3)}\ \neg F(x(3), x(3))$$

input1 von nTriples

input to it:

maxexpr: $\forall_{x(2)} \forall_{x(4)} \left(\forall_{x(5)} \left(F(x(4), x(5)) \lor \neg F(x(2), x(5))\right) \lor \neg F(x(4), x(2))\right) \bigwedge \forall_{x(3)} \neg F(x(3), x(3)) \bigwedge \forall_{x(1,1)} \exists_{y(1,1)} F(x(1, 1), y(1, 1)) \bigwedge \forall_{x(1,2)} \exists_{y(1,2)} F(x(1, 2), y(1, 2))$

ckpairs:
$$\begin{pmatrix} \{\{\}, (x(3)\ x(4)\ x(5)\ y(1, 2)), \{\}\} & \{\{F(x(4), x(5)), \neg F(x(3), x(3))\}, \text{and}\} \\ \{(x(5)\ y(1, 2)), (x(2)\ x(1, 2)\ y(1, 1)), \{\}\} & \{\{F(x(1, 2), y(1, 2)), \neg F(x(2), x(5))\}, \text{and}\} \\ \left\{\begin{pmatrix} x(1, 1) & y(0) \\ x(2) & y(1, 1) \end{pmatrix}, (x(4)\ x(1, 1)\ y(0)), \{\}\right\} & \{\{F(x(1, 1), y(1, 1)), \neg F(x(4), x(2))\}, \text{and}\} \end{pmatrix}$$

prefix: $\{y(0), x(1, 1), y(1, 1), x(1, 2), y(1, 2), x(2), x(3), x(4), x(5)\}$

output no. 1 it / input no. 1 nTriples:

maxexpr: $\forall_{x(3)} \neg F(x(3), x(3)) \bigwedge \forall_{x(1,1)} \exists_{y(1,1)} F(x(1, 1), y(1, 1)) \bigwedge \forall_{x(1,2)} \exists_{y(1,2)} F(x(1, 2), y(1, 2)) \bigwedge \forall_{x(2,1)} \forall_{x(4,1)} \left(\forall_{x(5,1)} \left(F(x(4, 1), x(5, 1)) \lor \neg F(x(2, 1), x(5, 1))\right) \lor \neg F(x(4, 1), x(2, 1))\right) \bigwedge \forall_{x(2,2)} \forall_{x(4,2)} \left(\forall_{x(5,2)} \left(F(x(4, 2), x(5, 2)) \lor \neg F(x(2, 2), x(5, 2))\right) \lor \neg F(x(4, 2), x(2, 2))\right)$

ckpairs:
$$\begin{pmatrix} \{\{\}, (x(3)\ x(4, 2)\ x(5, 2)\ y(1, 2)), \{\}\} & \{\{F(x(4, 2), x(5, 2)), \neg F(x(3), x(3))\}, \text{and}\} \\ \{(x(5, 2)\ y(1, 2)), \{\}, (x(2, 2)\ x(1, 2))\} & \{\{F(x(1, 2), y(1, 2)), \neg F(x(2, 2), x(5, 2))\}, \text{and}\} \\ \left\{\begin{pmatrix} x(1, 1) & y(0) \\ x(2, 1) & y(1, 1) \end{pmatrix}, (x(1, 1)\ x(4, 1)\ y(0)), \{\}\right\} & \{\{F(x(1, 1), y(1, 1)), \neg F(x(4, 1), x(2, 1))\}, \text{and}\} \end{pmatrix}$$

prefix: $\{y(0), x(1, 1), y(1, 1), x(1, 2), y(1, 2), x(3), x(2, 1), x(2, 2), x(4, 1), x(4, 2), x(5, 2)\}$

Unverträgliche Substitutionen 1

```
ktuple no. 1 :( F(x(1, 1), y(1, 1))   ¬ F(x(2, 1), x(5, 1)) )
              ( F(x(4, 1), x(5, 1))   ¬ F(x(4, 2), x(2, 2)) )

oldckpairs before nckPairsL5:

(      {{}, ( x(3)  x(4, 2)  x(5, 2)  y(1, 2) ), {}}            {{F(x(4, 2), x(5, 2)), ¬ F(x(3), x(3))}, and}  )
(    {( x(5, 2)  y(1, 2) ), {}, ( x(2, 2)  x(1, 2) )}      {{F(x(1, 2), y(1, 2)), ¬ F(x(2, 2), x(5, 2))}, and} )
( {( x(1, 1)   y(0)   ), ( x(1, 1)  x(4, 1)  y(0) ), {}}   {{F(x(1, 1), y(1, 1)), ¬ F(x(4, 1), x(2, 1))}, and} )
(  ( x(2, 1)  y(1, 1) )                                                                                     )

newckpairs before nckPairsL5:

( {( x(5, 1)  y(1, 1) ), {}, ( x(1, 1)  x(2, 1) )}  {{F(x(1, 1), y(1, 1)), ¬ F(x(2, 1), x(5, 1))}, and} )
(         {{}, {}, ( x(2, 2)  x(5, 1) )}             {{F(x(4, 1), x(5, 1)), ¬ F(x(4, 2), x(2, 2))}, or}  )
(                  ( x(4, 1)  x(4, 2) )                                                                  )

Inkonsistent substitutions:

{{x[4, 1], y[0], y[1, 2]}, {x[4, 2], y[0], y[1, 2]}}

nckpairs after nckPairsL5: {}

ktuple no. 2 :( F(x(1, 2), y(1, 2))   ¬ F(x(2, 1), x(5, 1)) )
              ( F(x(4, 1), x(5, 1))   ¬ F(x(4, 2), x(2, 2)) )

oldckpairs before nckPairsL5:

(      {{}, ( x(3)  x(4, 2)  x(5, 2)  y(1, 2) ), {}}            {{F(x(4, 2), x(5, 2)), ¬ F(x(3), x(3))}, and}  )
(    {( x(5, 2)  y(1, 2) ), {}, ( x(2, 2)  x(1, 2) )}      {{F(x(1, 2), y(1, 2)), ¬ F(x(2, 2), x(5, 2))}, and} )
( {( x(1, 1)   y(0)   ), ( x(1, 1)  x(4, 1)  y(0) ), {}}   {{F(x(1, 1), y(1, 1)), ¬ F(x(4, 1), x(2, 1))}, and} )
(  ( x(2, 1)  y(1, 1) )                                                                                     )

newckpairs before nckPairsL5:

( {( x(5, 1)  y(1, 2) ), {}, ( x(1, 2)  x(2, 1) )}  {{F(x(1, 2), y(1, 2)), ¬ F(x(2, 1), x(5, 1))}, and} )
(         {{}, {}, ( x(2, 2)  x(5, 1) )}             {{F(x(4, 1), x(5, 1)), ¬ F(x(4, 2), x(2, 2))}, or}  )
(                  ( x(4, 1)  x(4, 2) )                                                                  )

Inkonsistent substitutions:

{{x[4, 1], y[0], y[1, 2]}, {x[4, 2], y[0], y[1, 2]}}

nckpairs after nckPairsL5: {}

output nTriples:

ntriples: {}
```

Input2 von `nTriples`

input to it:

maxexpr: $\forall_{x(2)} \forall_{x(4)} \left(\forall_{x(5)} (F(x(4), x(5)) \vee \neg F(x(2), x(5))) \vee \neg F(x(4), x(2))\right) \bigwedge \forall_{x(3)} \neg F(x(3), x(3)) \bigwedge$
$\forall_{x(1,1)} \exists_{y(1,1)} F(x(1,1), y(1,1)) \bigwedge \forall_{x(1,2)} \exists_{y(1,2)} F(x(1,2), y(1,2))$

ckpairs: $\begin{pmatrix} \{\{\}, (x(3)\ \ x(4)\ \ x(5)\ \ y(1,1)), \{\}\} & \{\{F(x(4), x(5)), \neg F(x(3), x(3))\}, \text{and}\} \\ \{(\underline{x(2)\ \ y(1,2)}), (x(4)\ \ x(1,2)\ \ y(1,1)), \{\}\} & \{\{F(x(1,2), y(1,2)), \neg F(x(4), x(2))\}, \text{and}\} \\ \left\{\begin{pmatrix} x(1,1) & y(0) \\ x(5) & y(1,1) \end{pmatrix}, (\underline{x(2)}\ \ x(1,1)\ \ \underline{y(0)}), \{\}\right\} & \{\{F(x(1,1), y(1,1)), \neg F(x(2), x(5))\}, \text{and}\} \end{pmatrix}$

prefix: $\{y(0), x(1,1), y(1,1), x(1,2), y(1,2), x(2), x(3), x(4), x(5)\}$

output no. 1 it / input no. 1 nTriples:

maxexpr: $\forall_{x(3)} \neg F(x(3), x(3)) \bigwedge \forall_{x(1,1)} \exists_{y(1,1)} F(x(1,1), y(1,1)) \bigwedge \forall_{x(1,2)} \exists_{y(1,2)} F(x(1,2), y(1,2)) \bigwedge$
$\forall_{x(2,1)} \forall_{x(4,1)} \left(\forall_{x(5,1)} (\underline{F(x(4,1), x(5,1))} \vee \neg F(x(2,1), x(5,1))) \vee \neg \underline{F(x(4,1), x(2,1))}\right) \bigwedge$
$\forall_{x(2,2)} \forall_{x(4,2)} \left(\forall_{x(5,2)} (F(x(4,2), x(5,2)) \vee \neg \underline{F(x(2,2), x(5,2))}) \vee \neg F(x(4,2), x(2,2))\right)$

ckpairs: $\begin{pmatrix} \{\{\}, \{\}, (x(3)\ \ x(4,2)\ \ x(5,2))\} & \{\{F(x(4,2), x(5,2)), \neg F(x(3), x(3))\}, \text{and}\} \\ \{(\underline{x(2,2)\ \ y(1,2)}), \{\}, (x(1,2)\ \ x(4,2))\} & \{\{F(x(1,2), y(1,2)), \neg F(x(4,2), x(2,2))\}, \text{and}\} \\ \left\{\begin{pmatrix} x(1,1) & y(0) \\ x(5,1) & y(1,1) \end{pmatrix}, (x(1,1)\ \ \underline{x(2,1)\ \ y(0)}), \{\}\right\} & \{\{F(x(1,1), y(1,1)), \neg F(x(2,1), x(5,1))\}, \text{and}\} \end{pmatrix}$

prefix: $\{y(0), x(1,1), y(1,1), x(1,2), y(1,2), x(3), x(2,1), x(2,2), x(4,2), x(5,1), x(5,2)\}$

Unverträgliche Substitutionen 2

```
ktuple no. 1 :( F(x(1, 1), y(1, 1))  ¬ F(x(4, 1), x(2, 1)) )
              ( F(x(4, 1), x(5, 1))  ¬ F(x(2, 2), x(5, 2)) )

oldckpairs before nckPairsL5:

(          {{}, {}, ( x(3)  x(4, 2)  x(5, 2) )}             {{F(x(4, 2), x(5, 2)), ¬ F(x(3), x(3))}, and}  )
(    {( x(2, 2)  y(1, 2) ), {}, ( x(1, 2)  x(4, 2) )}    {{F(x(1, 2), y(1, 2)), ¬ F(x(4, 2), x(2, 2))}, and} )
( {( x(1, 1)   y(0)    ), ( x(1, 1)  x(2, 1)  y(0) ), {}}  {{F(x(1, 1), y(1, 1)), ¬ F(x(2, 1), x(5, 1))}, and} )
(  ( x(5, 1)  y(1, 1) )                                                                                    )

newckpairs before nckPairsL5:

( {( x(2, 1)  y(1, 1) ), {}, ( x(1, 1)  x(4, 1) )}  {{F(x(1, 1), y(1, 1)), ¬ F(x(4, 1), x(2, 1))}, and} )
(          {{}, {}, ( x(2, 2)  x(4, 1) )}                 {{F(x(4, 1), x(5, 1)), ¬ F(x(2, 2), x(5, 2))}, or}  )
(                   ( x(5, 1)  x(5, 2) )                                                                  )

Inkonsistent substitutions:

{x[2, 1], y[0], y[1, 1]}

nckpairs after nckPairsL5: {}

ktuple no. 2 :( F(x(1, 2), y(1, 2))  ¬ F(x(4, 1), x(2, 1)) )
              ( F(x(4, 1), x(5, 1))  ¬ F(x(2, 2), x(5, 2)) )

oldckpairs before nckPairsL5:

(          {{}, {}, ( x(3)  x(4, 2)  x(5, 2) )}             {{F(x(4, 2), x(5, 2)), ¬ F(x(3), x(3))}, and}  )
(    {( x(2, 2)  y(1, 2) ), {}, ( x(1, 2)  x(4, 2) )}    {{F(x(1, 2), y(1, 2)), ¬ F(x(4, 2), x(2, 2))}, and} )
( {( x(1, 1)   y(0)    ), ( x(1, 1)  x(2, 1)  y(0) ), {}}  {{F(x(1, 1), y(1, 1)), ¬ F(x(2, 1), x(5, 1))}, and} )
(  ( x(5, 1)  y(1, 1) )                                                                                    )

newckpairs before nckPairsL5:

( {( x(2, 1)  y(1, 2) ), {}, ( x(1, 2)  x(4, 1) )}  {{F(x(1, 2), y(1, 2)), ¬ F(x(4, 1), x(2, 1))}, and} )
(          {{}, {}, ( x(2, 2)  x(4, 1) )}                 {{F(x(4, 1), x(5, 1)), ¬ F(x(2, 2), x(5, 2))}, or}  )
(                   ( x(5, 1)  x(5, 2) )                                                                  )

Inkonsistent substitutions:

{x[2, 1], y[0], y[1, 2]}

nckpairs after nckPairsL5: {}

output nTriples:

ntriples: {}
```

Beispiel für `minkTupleQ3`

$$\exists y_1 (\forall x_1 (Hx_1 \vee \neg Jy_1x_1) \wedge \forall x_2 (Mx_2 \vee \neg Ly_1x_2)) \wedge$$
$$\exists y_2 (\forall x_3 (\neg Hx_3 \vee \neg Jy_2x_3) \wedge \forall x_4 (\neg Mx_4 \vee \neg Ly_2x_4)) \wedge$$
$$\forall x_5 (Fx_5 \vee \forall x_8 Jx_5x_8) \wedge$$
$$\forall x_6 (Gx_6 \vee \forall x_9 Lx_6x_9) \wedge$$
$$\forall x_7 (\neg Fx_7 \vee \neg Gx_7)$$

Resultat nach 5 Iterationen

$$\exists y_1(\forall x_1(Hx_1 \vee \neg Jy_1x_1) \wedge \forall x_2(Mx_2 \vee \neg Ly_1x_2)) \wedge$$
$$\exists y_2(\forall x_3(\neg Hx_3 \vee \neg Jy_2x_3) \wedge \forall x_4(\neg Mx_4 \vee \neg Ly_2x_4)) \wedge$$
$$\forall x_{5_1}(Fx_{5_1} \vee \forall x_{8_1} Jx_{5_1}x_{8_1}) \wedge$$
$$\forall x_{5_2}(Fx_{5_2} \vee \forall x_{8_2} Jx_{5_2}x_{8_2}) \wedge$$
$$\forall x_{6_1}(Gx_{6_1} \vee \forall x_{9_1} Lx_{6_1}x_{9_1}) \wedge$$
$$\forall x_{6_2}(Gx_{6_2} \vee \forall x_{9_2} Lx_{6_2}x_{9_2}) \wedge$$
$$\forall x_{7_1}(\neg Fx_{7_1} \vee \neg Gx_{7_1}); \wedge$$
$$\forall x_{7_2}(\neg Fx_{7_2} \vee \neg Gx_{7_2})$$

$$\{\{\{\{\},\{\},\{\{x_1,x_3\}\}\},\{Hx_1,\neg Hx_3\}\},$$
$$\{\{\{\},\{\},\{\{x_2,x_4\}\}\},\{Mx_2,\neg Mx_4\}\},$$
$$\{\{\{\},\{\{\underline{x_{5_1},x_{7_1},y_1}\}\},\{\}\},\{Fx_{5_1},\neg Fx_{7_1}\}\},$$
$$\{\{\{\},\{\{\underline{x_{5_2},x_{7_2},y_2}\}\},\{\}\},\{Fx_{5_2},\neg Fx_{7_2}\}\},$$
$$\{\{\{\},\{\{x_{6_1},\underline{x_{7_1},y_1}\}\},\{\}\},\{Gx_{6_1},\neg Gx_{7_1}\}\},$$
$$\{\{\{\},\{\{x_{6_2},\underline{x_{7_2},y_2}\}\},\{\}\},\{Gx_{6_2},\neg Gx_{7_2}\}\},$$
$$\{\{\{\{\underline{x_{5_1},y_1}\}\},\{\},\{\{x_1,x_{8_1}\}\}\},\{Jx_{5_1}x_{8_1},\neg Jy_1x_1\}\},$$
$$\{\{\{\{\underline{x_{5_2},y_2}\}\},\{\},\{\{x_3,x_{8_2}\}\}\},\{Jx_{5_2}x_{8_2},\neg Jy_2x_3\}\},$$
$$\{\{\{\{x_{6_1},y_1\}\},\{\},\{\{x_2,x_{9_1}\}\}\},\{Lx_{6_1}x_{9_1},\neg Ly_1x_2\}\},$$
$$\{\{\{\{x_{6_2},y_2\}\},\{\},\{\{x_4,x_{9_2}\}\}\},\{Lx_{6_2}x_{9_2},\neg Ly_2x_4\}\}\}$$

Minimale Erweiterungen:

$$\underline{\{\{Fx_{5_1},\neg Fx_{7_2}\},\{Fx_{5_2},\neg Fx_{7_1}\}\}}$$
$$\{\{Gx_{6_1},\neg Gx_{7_2}\},\{Gx_{6_2},\neg Gx_{7_1}\}\}$$
$$\{\{Jx_{5_1}x_{8_1},\neg Jy_2x_3\},\{Jx_{5_2}x_{8_2},\neg Jy_1x_1\}\}$$
$$\{\{Lx_{6_1}x_{9_1},\neg Ly_2x_4\},\{Lx_{6_2}x_{9_2},\neg Ly_1x_2\}\}$$

Korrektheit

1. Wenn output *False*, dann input *False*: Alle Umformungen beruhen auf bekannten logischen Schlussregeln.
2. Wenn output *sat*, dann input *sat*: Alle Umformungen sind *sat-äquivalent*. Es werden Beweispfade nur abgebrochen, wenn sie nicht minimal sind: Wenn output *sat*, dann gibt es keinen *minimalen* Beweispfad. Da im Falle eines Widerspruches, auch ein minimaler Beweis geführt werden kann, wird auch ein Widerspruchsbeweis gefunden, wenn es einen gibt (Widerspruchsbedingung).

Terminierung

- While-Schleife in Schritt 2 terminiert auf Grund der Minimalitätskriterien (Minimalitätsbedingung).
  1. Die While-Schleife würde genau dann nicht terminieren, wenn endlos die Menge ck-Paare um isomorphe ck-Paare erweitert würde.
  2. Eben dies schließen die Minimalitätskriterien aus.

Syntaktische Kriterien

- Der FOL-Decider beruht auf dem finitistischen Beweisverständnis: Äquivalenzumformung zum Zwecke der Identifikation formaler Eigenschaften anhand syntaktischer Kriterien.
- Die Realisierung dieses Beweisverständnis hängt vom syntaktischen Rahmen ab.
- Sie hängt nicht ab von der mengentheoretischen Interpretation eines Formalismus.
- Sie bemisst die Validität der axiomatischen Methode und kommt in Bezug auf Unentscheidbarkeitsbeweise von FOL zu einem negativen Ergebnis.